เอกสารประกอบการเรียน

เรื่อง ความน่าจะเป็น **ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

ความน่าจะเป็น

ในปัจจุบันวิชาที่มีความสำคัญอย่างยิ่งวิชาหนึ่งคือสถิติและวิชาสถิตินี้จะต้องอาศัยพื้นฐานความรู้เรื่องความน่าจะเป็น

จุดเริ่มต้นของทฤษฎีความน่าจะเป็นอาจกล่าวได้ว่าเริ่มมาจากปัญหาของการเล่นเกมการพนัน โดยนักพนันพยายามหาวิธีทำให้ชนะในเกมพนันต่าง ๆ ดังนั้น ในทฤษฎีความน่าจะเป็นจึงมักพบปัญหาของการโยนเหรียญ การทอดลูกเต๋า และการหยับไพ่ เป็นต้น

ปัญหาที่นำไปสู่การเริ่มของทฤษฎีความน่าจะเป็นมี 2 ปัญหา คือ

ปัญหาที่ 1 ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 4 ครั้ง ควรจะพนันว่าออกแต้ม 6 กอย่างน้อย 1 ครั้ง ดังนั้น หากทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน 24 ครั้ง ควรพนันว่าจะออกแต้ม 6 ทั้งสองลูกอย่างน้อย 1 ครั้ง หรือไม่

ปัญหาที่ 2 A และ B ตกลงที่จะเล่นเกมพนันกัน ทั้งสองมีฝีมือเท่าเทียมกัน ผู้ที่ชนะ 5 เกมก่อนจะเป็นผู้ชนะการแข่งขันและได้รับเงินรางวัลทั้งหมด แต่เมื่อเล่นมาได้ 7 เกม จำเป็นต้องยุติการแข่งขันและไม่สามารถแข่งขันต่อไปได้ โดยที่ขณะนั้น A ชนะแล้ว 4 เกม และ B ชนะแล้ว 3 เกม ปัญหาคือ A และ B ควรแบ่งเงินพนันอย่างไรจึงจะยุติธรรม

ปัญหาทั้งสองเสนอโดยเดอเมเร ซึ่งเป็นขุนนางชาวฝรั่งเศสให้กับปาสคาล ราวคริสต์ศตวรรษที่ 17 ซึ่งนำไปสู่ทฤษฎีความน่าจะเป็น

ในการศึกษาเรื่องความน่าจะเป็น จำเป็นต้องศึกษาเกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีหรือจำนวนผลลัพธ์หรือจำนวนรูปแบบในการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่สนใจจากผลที่เกิดขึ้นทั้งหมด ต่อไปจะได้กล่าวถึงการหาจำนวนวิธีที่จะนับผลของการทำงานอย่างใดอย่างหนึ่ง

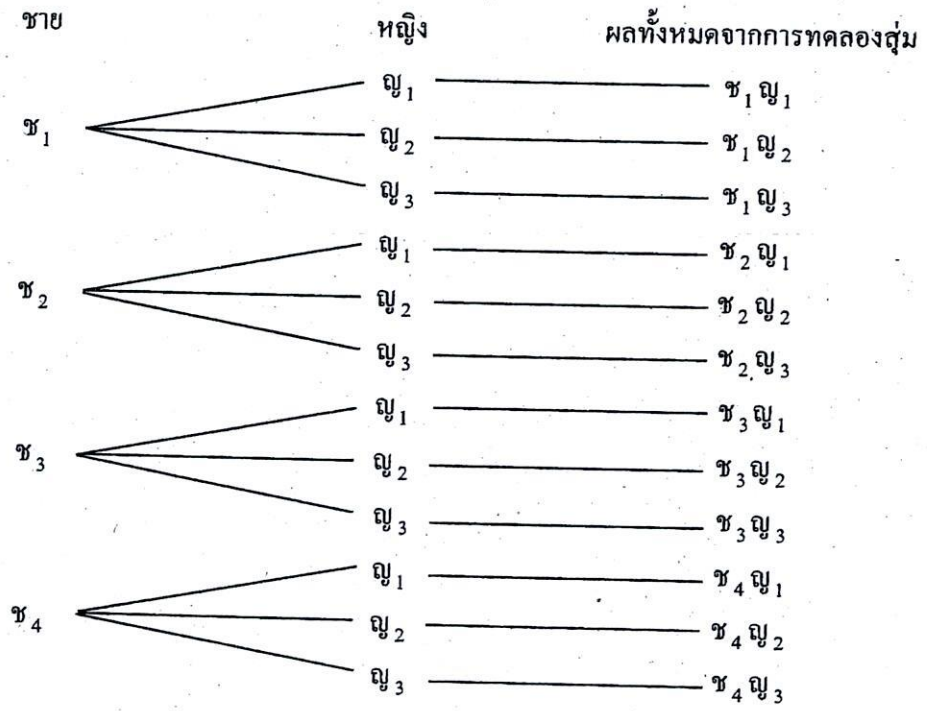
พิจารณาในการทำงานอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยที่งานนั้นมีขั้นตอนการทำงานตั้งแต่ 2 ขั้นตอนขึ้นไป เรามีวิธีหาจำนวนวิธีหรือจำนวนผลลัพธ์หรือจำนวนรูปแบบที่แตกต่างกันของการทำงานนั้นได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 ในการแสดงละครของโรงเรียนแห่งหนึ่งครูต้องการผู้แสดงนำฝ่ายชาย 1 คน และผู้แสดงนำฝ่ายหญิง 1 คน โดยมีนักเรียนชายมาสมัครเป็นผู้แสดงนำ 4 คน และมีนักเรียนหญิงมาสมัครเป็นผู้แสดงนำ 3 คน จำนวนวิธีที่ครูจะเลือกผู้แสดงนำดังกล่าวได้แตกต่างกันทั้งสิ้นกี่วิธี

วิธีทำ สมมติให้นักเรียนชายทั้ง 4 คน คือ $ช_1$, $ช_2$, $ช_3$, $ช_4$

ให้นักเรียนหญิงทั้ง 3 คน คือ $ญ_1$, $ญ_2$, $ญ_3$

เขียนแผนภาพแสดงการเลือกนักเรียนได้ดังนี้



ดังนั้น จำนวนวิธีที่ครูจะเลือกผู้แสดงนำได้มี 12 วิธี คือ

$(ช_1,ญ_1), (ช_1,ญ_2), (ช_1,ญ_3), (ช_2,ญ_1), (ช_2,ญ_2), (ช_2,ญ_3), (ช_3,ญ_1), (ช_3,ญ_2),$
$(ช_3,ญ_3), (ช_4,ญ_1), (ช_4,ญ_2), (ช_4,ญ_3)$

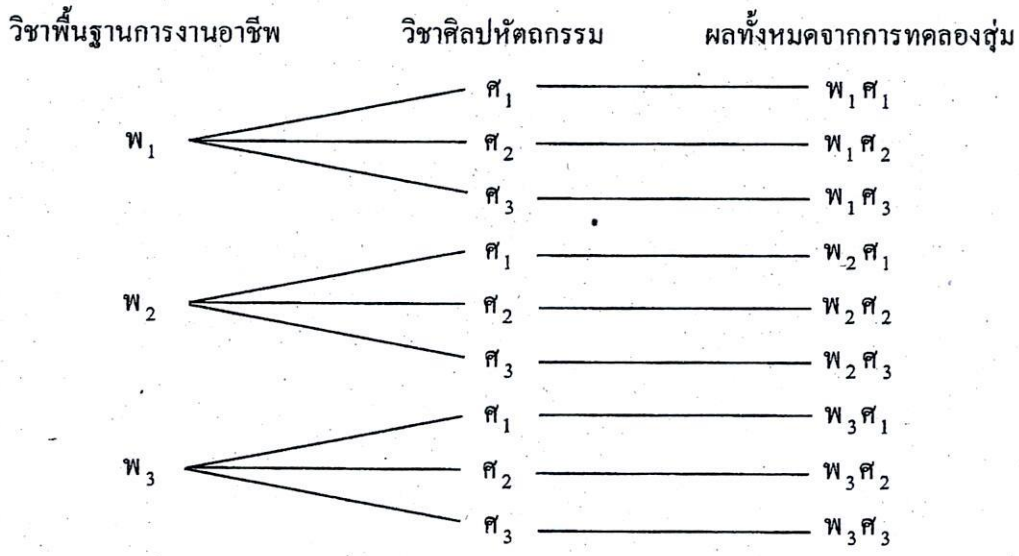
ooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 2 นักเรียนคนหนึ่งจะต้องเลือกเรียนวิชาพื้นฐานการงานอาชีพ 1 รายวิชา และวิชาศิลปหัตถกรรม 1 รายวิชา ถ้าโรงเรียนกำหนดสอนวิชาพื้นฐานการงานอาชีพให้ 3 รายวิชา และวิชาศิลปหัตถกรรม 3 รายวิชา จงหาจำนวนวิธีที่นักเรียนคนนี้จะเลือกเรียนทั้งวิชาพื้นฐานการงานอาชีพและวิชาหัตถกรรม

วิธีทำ สมมติให้วิชาพื้นฐานการงานอาชีพ คือ $พ_1, พ_2, พ_3$

ให้วิชาศิลปหัตถกรรม คือ $ศ_1, ศ_2, ศ_3$

เขียนแผนภาพแสดงการเลือกนักเรียนได้ดังนี้



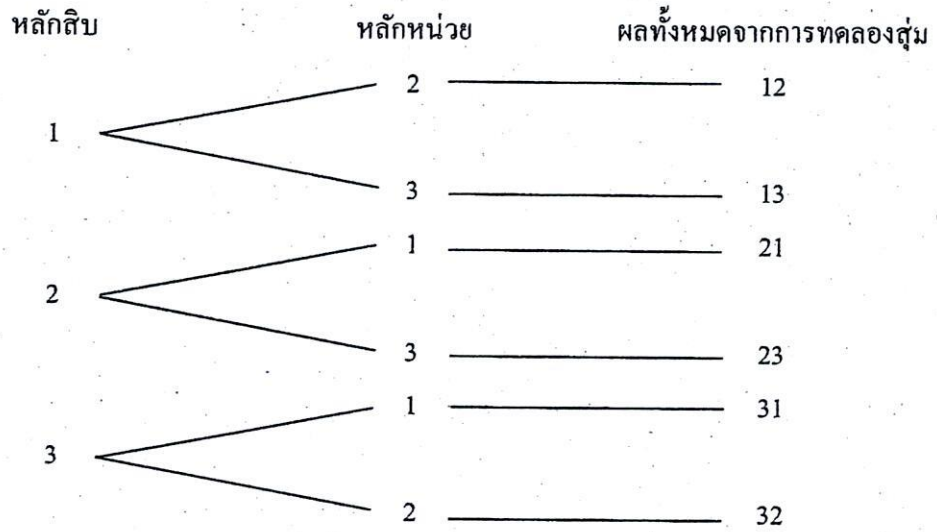
ดังนั้น จำนวนวิธีที่นักเรียนจะเลือกเรียนทำได้มี 9 วิธี คือ

$(พ_1,ศ_1)$, $(พ_1,ศ_2)$, $(พ_1,ศ_3)$, $(พ_2,ศ_1)$, $(พ_2,ศ_2)$, $(พ_2,ศ_3)$, $(พ_3,ศ_1)$, $(พ_3,ศ_2)$, $(พ_3,ศ_3)$

ooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 3 จงหาจำนวนเต็มบวก 2 หลัก จากตัวเลข 1 , 2 และ 3 โดยที่แต่ละหลักไม่มีตัวเลขที่ซ้ำกัน

วิธีทำ เขียนแผนภาพแสดงการเลือกนักเรียนได้ดังนี้



ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะสร้างเลขสองหลักทำได้มี 6 วิธี คือ 12 , 13 , 21 , 23 , 31 , 32

ooooooooooooooooooooooo

1. กฎเกณฑ์การนับเบื้องต้น (Fundamental Principle of Counting)

กฎเกณฑ์การนับเบื้องต้นใช้สำหรับนับจำนวนวิธีที่อาจเป็นไปได้จากการทำงานอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยที่งานนั้นมีขั้นตอนการทำตั้งแต่ 2 ขั้นตอนขึ้นไป

กฎข้อที่ 1 ในการทำงานอย่างหนึ่งซึ่งมี 2 ขั้นตอน โดยในขั้นตอนแรกเลือกทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีของขั้นตอนแรกเลือกทำขั้นตอนที่สองได้ n_2 วิธี จำนวนวิธีที่จะทำงานดังกล่าวได้เท่ากับ $n_1 \cdot n_2$ วิธี

จากตัวอย่างที่ 1 ครูมีขั้นตอนการเลือกนักเรียน 2 ขั้นตอน

ขั้นตอนแรก เลือกนักเรียนชายทำได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่สอง เลือกนักเรียนหญิงทำได้ 3 วิธี

จำนวนวิธีที่ครูเลือกนักเรียนได้เท่ากับ $4 \times 3 = 12$ วิธี

จากตัวอย่างที่ 2 ครูมีขั้นตอนการเลือกวิชา 2 ขั้นตอน

ขั้นตอนแรก เลือกวิชาพื้นฐานการงานอาชีพทำได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่สอง เลือกวิชาศิลปหัตถกรรมทำได้ 3 วิธี

จำนวนวิธีที่นักเรียนเลือกวิชาได้เท่ากับ $3 \times 3 = 9$ วิธี

จากตัวอย่างที่ 3 การสร้างจำนวนเต็มบวกสองหลักทำได้ 2 ขั้นตอน

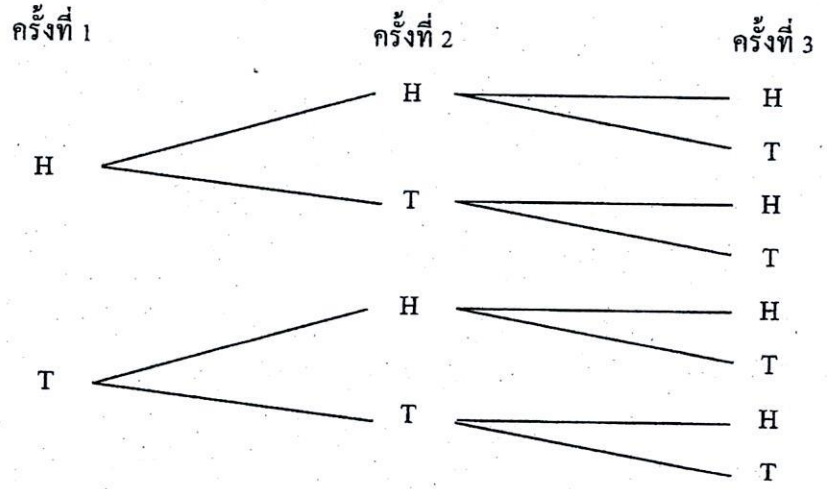
ขั้นตอนแรก เลือกตัวเลขในหลักสิบทำได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่สอง เลือกตัวเลขในหลักหน่วยทำได้ 3 วิธี

จำนวนเต็มบวกสองหลักดังกล่าวทำได้เท่ากับ $3 \times 2 = 6$ วิธี

ในการหาจำนวนวิธีเมื่อมีขั้นตอนการทำงานมากกว่า 2 ขั้นตอน

ตัวอย่างที่ 4 จงหาจำนวนวิธีที่จะเกิดหัวและก้อยที่แตกต่างกันจากการโยนเหรียญห้าบาทหนึ่งเหรียญ 3 ครั้ง



จากแผนภาพเกิดหัวและก้อย ได้แตกต่างกัน คือ (HHH) , (HHT) , (HTH) , (HTT) , (THH) , (THT) , (TTH) , (TTT)

ดังนั้น จำนวนวิธีที่เกิดหัวและก้อยเท่ากับ 8 วิธีที่แตกต่างกัน

ooooooooooooooooooooooooo

กฎข้อที่ 2 ในการทำงานอย่างหนึ่งซึ่งมี k ขั้นตอน โดยในขั้นตอนที่หนึ่งเลือกทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่หนึ่งเลือกทำขั้นตอนที่สองได้ n_2 วิธี ในแต่ละขั้นตอนที่สองเลือกทำขั้นตอนที่สามได้ n_3 วิธี เรื่อยไปจนถึงในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ $k-1$ เลือกทำขั้นตอนที่ k ได้ n_k วิธี จำนวนวิธีที่จะทำงานดังกล่าวได้แตกต่างกันเท่ากับ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots n_k$ วิธี

จากตัวอย่างที่ 4 ในการโยนเหรียญ 3 ครั้ง ทำได้ 3 ขั้นตอน

ขั้นตอนแรก โยนเหรียญครั้งที่หนึ่งเกิดได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่สอง โยนเหรียญครั้งที่สองเกิดได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่สาม โยนเหรียญครั้งที่สามเกิดได้ 3 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่เกิดหัวและก้อยแตกต่างกันเท่ากับ $2 \times 2 \times 2 = 8$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5 ชมรมคณิตศาสตร์มีสมาชิก 15 คน ถ้าต้องการเลือกประธานชมรม รองประธานชมรม เลขานุการและเหรัญญิกชมรม ตำแหน่งละ 1 คน จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกตำแหน่งต่าง ๆ ดังกล่าวที่แตกต่างกัน

วิธีทำ ในการเลือกตำแหน่งต่าง ๆ ทำได้ 4 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1	เลือกประธานชมรมทำได้	15	วิธี
ขั้นตอนที่ 2	เลือกรองประธานชมรมทำได้	14	วิธี
ขั้นตอนที่ 3	เลือกเลขานุการทำได้	13	วิธี
ขั้นตอนที่ 4	เลือกเหรัญญิกชมรมทำได้	12	วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะเลือกได้แตกต่างกันเท่ากับ $15 \times 14 \times 13 \times 12 = 32{,}760$ วิธี

ooooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 6 จำนวนเต็มบวกห้าหลักที่สร้างจากเลขโดด 0 , 1 , 2 , 3 , ... , 9 โดยที่แต่ละหลักไม่มีตัวเลขที่ซ้ำกันทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ ในการเลือกตำแหน่งต่าง ๆ ทำได้ 5 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1	เลือกตัวเลขในหลักหมื่นทำได้	9	วิธี (ยกเว้น 0)
ขั้นตอนที่ 2	เลือกตัวเลขในหลักพันทำได้	9	วิธี
ขั้นตอนที่ 3	เลือกตัวเลขในหลักร้อยทำได้	8	วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกตัวเลขในหลักสิบทำได้ 7 วิธี

ขั้นตอนที่ 5 เลือกตัวเลขในหลักหน่วยทำได้ 6 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะเลือกได้แตกต่างกันเท่ากับ $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 27{,}216$ วิธี

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

ตัวอย่างที่ 7 จงหาจำนวนผลทั้งหมดที่แตกต่างกันจากการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก และโยนเหรียญห้าบาทหนึ่งเหรียญ และหยิบไพ่หนึ่งใบจากสำรับที่มีไพ่ 52 ใบ

วิธีทำ หาจำนวนวิธีที่จะทำงานดังกล่าวทำได้ 3 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 ทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกทำได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 โยนเหรียญห้าบาทหนึ่งเหรียญทำได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 หยิบไพ่หนึ่งใบจากสำรับทำได้ 52 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะเลือกได้แตกต่างกันเท่ากับ $6 \times 2 \times 52 = 624$ วิธี

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงใช้แผนภาพต้นไม้หาผลลัพธ์ทั้งหมดและจำนวนวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมดจากการ

1) ทอดลูกเต๋า 1 ลูก กับโยนเหรียญห้าบาท 1 เหรียญพร้อมกัน

.....

.....

.....

.....

2) เข้าออกห้องประชุมที่มีประตูเข้า 4 ประตู และประตูออก 3 ประตู

.....

.....

.....

.....

3) สร้างจำนวนเต็มบวก 3 หลัก จากตัวเลข 1 , 2 และ 3 โดยที่แต่ละหลักมีตัวเลขซ้ำกันได้

.....

.....

.....

.....

4) โยนเหรียญห้าบาทหนึ่งเหรียญ 4 ครั้ง

.....

.....

.....

.....

5) ทอดลูกเต๋า 2 ลูก พร้อมกัน 1 ครั้ง

.....

.....

.....

.....

6) นำจดหมาย 3 ฉบับ ไปใส่ในตู้ไปรษณีย์ 3 ตู้ โดยที่แต่ละตู้มีจดหมายมากกว่า 1 ฉบับไม่ได้

.....

.....

.....

.....

2. จงใช้กฎเกณฑ์การนับเบื้องต้นหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่แตกต่างกันในข้อ 1

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหาว่ามีจำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 100 และ 999 ทั้งหมดกี่จำนวนที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ทอดลูกเต๋าพร้อมกัน 3 ลูก จงหาว่ามีจำนวนผลที่เกิดที่แตกต่างกันทั้งหมดเท่าใด

.....

.....

.....

.....

.....

5. มีนักเรียนหญิง 4 คน ต้องการถ่ายรูปร่วมกันทั้งหมด โดยยืนเรียงหน้ากระดาน จะถ่ายรูปได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่รูป

.....

.....

.....

.....

6. กุญแจรหัสมี 3 แถว แต่ละแถวมีตัวเลข 6 ตัว ตั้งแต่ 1 ถึง 6 จะมีวิธีที่หมุนกุญแจรหัสนี้แล้วเปิดกุญแจไม่ออกกี่วิธี

.....

.....

.....

.....

.....

7. บริษัทแห่งหนึ่งต้องการคนงานชาย 1 คน และหญิง 1 คน ถ้ามีผู้ชายมาสมัครทำงานนี้ 4 คน และมีผู้หญิงมาสมัคร 5 คน บริษัทนี้จะมีวิธีเลือกคนเข้าทำงานดังกล่าวได้กี่วิธี

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. จะสร้างคำโดยใช้ตัวอักษร 4 ตัว จากคำว่า " MATRIX " ได้กี่คำ โดยที่ตัวอักษรไม่ซ้ำกันและคำที่สร้างไม่มีความหมายก็ได้

.....

.....

.....

.....

.....

9. นายสุขใจเข้าไปในร้านขายก๋วยเตี๋ยวซึ่งมีเส้นหมี่ เส้นเล็ก เส้นใหญ่และบะหมี่ มีทั้งหมูและเนื้อ และมีน้ำกับแห้ง นายสุขใจจะสั่งอาหารได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

.....

.....

.....

.....

.....

10. ในการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ปีหนึ่ง ในประเภททีมมีทีมเข้าสอบแข่งขัน 40 ทีม มีรางวัลทั้งหมด 3 รางวัล คือ รางวัลที่ 1 รางวัลที่ 2 และรางวัลที่ 3 ถ้าไม่มีทีมใดมีคะแนนเท่ากันเลยจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ในการมอบรางวัลทั้ง 3 รางวัลมีกี่วิธี

.....

.....

.....

.....

.....

ooooooooooooooooooooooooo

2. แฟกทอเรียล n (Factorial n)

เพื่อความสะดวกในการเขียนผลคูณของจำนวนเต็มบวกที่เรียงกันตามลำดับ จึงควรใช้สัญลักษณ์ในการแสดงการคูณที่เรียกว่า แฟกทอเรียล โดยกำหนด ดังนี้

นิยาม เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก แฟกทอเรียล n หมายถึง ผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n แฟกทอเรียล n เขียนแทนด้วย n!

หมายเหตุ : n! อ่านว่า แฟกทอเรียลเอ็น หรือเอ็นแฟกทอเรียลก็ได้

จากบทนิยาม $n! = 1.2.3\ldots(n-1).n$

หรือ $n! = n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots3.2.1$

หรือ $n! = n.(n-1)!$

เช่น $5! = 1.2.3.4.5 = 120$

หรือ $5! = 5(4!)$

$1! = 1$

$(n+r)! = (n+r)(n+r-1)(n+r-2)\ldots3.2.1$

หรือ $(n+r)! = (n+r)(n+r-1)!$

บทนิยามของ n! กล่าวถึงเฉพาะ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก แต่บางครั้งจำเป็นต้องใช้ 0! จึงกำหนดค่า

$$0! = 1$$

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $\frac{8!}{5!}$

วิธีทำ $\frac{8!}{5!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5} = 6.7.8 = 336$

หรือ $\frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.(5!)}{5!} = 8.7.6 = 336$

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

ตัวอย่างที่ 9 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปแฟกทอเรียล

1) 15.16.17.18
2) $(n+1)(n+2)(n+3)$
3) $(n+k)(n+k-1)(n+k-2)(n+k-3)$

วิธีทำ 1) $15.16.17.18 = \dfrac{(1.2.3....14)15.16.17.18}{1.2.3....14} = \dfrac{18!}{14!}$

หรือ $15.16.17.18 = \dfrac{(14!)15.16.17.18}{14!} = \dfrac{18!}{14!}$

2) $(n+1)(n+2)(n+3) = \dfrac{n!(n+1)(n+2)(n+3)}{n!} = \dfrac{(n+3)!}{n!}$

3) $(n+k)(n+k-1)(n+k-2)(n+k-3)$

$$= \frac{(n+k-4)!(n+k-3)(n+k-2)(n+k-1)(n+k)}{(n+k-4)!} = \frac{(n+k)!}{(n+k-4)!}$$

ooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 10 ให้ $(n+5)! = 42(n+3)!$ จงหาค่าของ n

วิธีทำ จาก

$$(n+5)! = 42(n+3)!$$

$$\frac{(n+5)!}{(n+3)!} = 42$$

$$\frac{(n+3)!(n+4)(n+5)}{(n+3)!} = 42$$

$$(n+4)(n+5) = 42$$

$$n^2 + 9n + 20 = 42$$

$$n^2 + 9n - 22 = 0$$

$$(n+11)(n-2) = 0$$

$n = 2, -11$ แต่ถ้า $n = -11$ จะได้ $n+5$ เป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะไม่อยู่ในนิยาม ดังนั้น $n = 2$

ooooooooooooooooooooooo

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปซึ่งไม่มีแฟกทอเรียล

1) $\frac{11!}{8!}$

.....

.....

.....

2) $\frac{3!}{6!}$

.....

.....

.....

3) $\frac{3!5!6!}{4!7!8!}$

.....

.....

.....

4) $\frac{n!}{(n-3)!}$

.....

.....

.....

5) $\frac{(n-2)!(n-1)!}{n!(n+1)!}$

.....

.....

.....

6) $\dfrac{(n-2)!(2n)!}{n!(2n-2)!}$

.....

.....

.....

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปแฟกทอเรียล

1) $68.69.70$ = ...

= .....

2) $(n+1)n(n-1)$ = ...

= .....

= .....

3) $\dfrac{16.17.18}{5.6.7}$ = ...

= .....

= .....

4) $(n+r-1)(n+r-2)(n+r-3)$

= .....

= .....

= .....

3. จงหาค่า n เมื่อกำหนด

1) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 870$

.....

.....

.....

.....

2) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} = 56$

.....

.....

.....

.....

3) $\dfrac{n!}{(n-8)!8!} = \dfrac{n!}{(n-6)!6!}$

.....

.....

.....

.....

4) $\dfrac{7n!}{(n-1)!(n+3)!} = \dfrac{n!}{3(n+2)!(n-2)!}$

.....

.....

.....

.....

5) $\dfrac{n!(n-3)!}{(n-1)!(n-2)!} = 3$

.....

.....

.....

.....

6) $\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{(n+2)!}{2(n+1)!}$

.....

.....

.....

.....

⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙

3. วิธีเรียงสับเปลี่ยน

ในการหาจำนวนวิธีของการนำสิ่งต่าง ๆ มาจัดเรียนโดยคำนึงว่าจะมีการเรียงลำดับกันอย่างไร เช่น การนำนักเรียน 4 คน มายืนถ่ายรูปกันเป็นแถวหน้ากระดาน โดยคำนึงถึงลำดับของนักเรียนดังกล่าว หรือการนำกระถางดอกไม้ที่แตกต่างกัน 5 กระถาง มาเรียงเป็นวงกลมว่าทำได้กี่วิธี ซึ่งวิธีดังกล่าวเหล่านี้เรียกว่า วิธีเรียงสับเปลี่ยน

ตัวอย่างที่ 11 ต้องการนำนักเรียน 4 คน มายืนถ่ายรูปกันเป็นแถวหน้ากระดาน จะจัดได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ให้นักเรียนทั้ง 4 คน คือ A , B , C และ D ในการจัดให้ยืนเข้าแถวหน้ากระดานที่ต่างกันทำได้ดังนี้

ABCD , ABDC , ACBD , ACDB , ADBC , ADCB

BACD , BADC , BCAD , BDAC , BDAC , BDCA

CABD , CADB , CBAD , CBDA , CDAB , CDBA

DABC , DACB , DBAC , DBCA , DCAB , DCBA

ซึ่งมีแนวคิด คือ ในตำแหน่งที่ 1 เลือกนักเรียนมายืนได้ 4 วิธี

ในตำแหน่งที่ 2 เลือกนักเรียนมายืนได้ 3 วิธี

ในตำแหน่งที่ 3 เลือกนักเรียนมายืนได้ 2 วิธี

และ ในตำแหน่งที่ 4 เลือกนักเรียนมายืนได้ 1 วิธี

จำนวนวิธีที่จะจัดทำได้ = 4.3.2.1 = 4! หรือ 24 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดนักเรียน 4 คน มายืนดังกล่าวเท่ากับ 4! หรือ 24 วิธี

⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙⊙

จากตัวอย่างที่ 11 ถ้ากำหนดให้มีนักเรียน n คน จะจัดให้ถ่ายรูปดังกล่าวได้ ดังนี้

ในตำแหน่งที่ 1	เลือกนักเรียนมายืนได้ n	วิธี
ในตำแหน่งที่ 2	เลือกนักเรียนมายืนได้ n – 1	วิธี
ในตำแหน่งที่ 3	เลือกนักเรียนมายืนได้ n – 2	วิธี
⋮	⋮	⋮
ในตำแหน่งที่ n – 1	เลือกนักเรียนมายืนได้ 2	วิธี
ในตำแหน่งที่ n	เลือกนักเรียนมายืนได้ 1	วิธี

จำนวนวิธีในการจัดนักเรียน n คน มายืนดังกล่าวทำได้เท่ากับ

$n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3.2.1 = n!$

ซึ่งพอจะสรุปได้ว่าในการจัดของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันมาจัดเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรง จำนวนวิธีดังกล่าวทั้งหมดเท่ากับ n!

กฎข้อที่ 3 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันในแนวตรงเท่ากับ n!

ตัวอย่างที่ 12 มีหนังสือที่แตกต่างกัน 10 เล่ม ต้องการจัดวางบนชั้นวางหนังสือทั้ง 10 เล่ม จะมีวิธีจัดวางที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ การจัดวางหนังสือดังกล่าวทำได้ = 10! = 3,628,800 วิธี

ดังนั้นการจัดวางหนังสือ 10 เล่ม บนชั้นหนังสือทั้งหมดทำได้ 10! = 3,628,800 วิธี

ooooooooooooooooooooooo

ถ้ามีของอยู่ n สิ่งที่แตกต่างกัน ต้องการนำมาจัดเรียงในแนวตรงทีละ r สิ่ง ($r \leq n$)

มีแนวคิดในการจัดเรียง ดังนี้

เนื่องจากจัดเรียงของเพียง r สิ่ง จึงมีตำแหน่งที่จะจัดวางเท่ากับ r ตำแหน่ง

ในตำแหน่งที่ 1 เลือกสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง

ในตำแหน่งที่ 2 เลือกสิ่งของที่แตกต่างกัน $n-1$ สิ่ง

ในตำแหน่งที่ 3 เลือกสิ่งของที่แตกต่างกัน $n-2$ สิ่ง

⋮ ⋮

ในตำแหน่งที่ $r-1$ เลือกสิ่งของที่แตกต่างกัน $n-2$ สิ่ง

ในตำแหน่งที่ r เลือกสิ่งของที่แตกต่างกัน $n-r+1$ สิ่ง

จำนวนวิธีที่จัดเรียงทำได้ $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r)(n-r+1)$

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะจัดเรียงทำได้ $= \dfrac{n!}{(n-r)!}$

กฎข้อที่ 4 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงทีละ r สิ่ง ในแนวตรงเท่ากับ $\dfrac{n!}{(n-r)!}$ เมื่อ $r \leq n$

ในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์ $P_{n,r}$ แทนการจัดเรียงของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดเรียงทีละ r สิ่ง ในแนวตรงและใช้สัญลักษณ์ $P_{n,n}$ แทนการจัดเรียงของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดในแนวตรง

จะได้ $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ เมื่อ $r \leq n$

และ $P_{n,n} = n!$

ooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 13 จงหาค่าของ

1) $P_{5,5}$ 2) $P_{7,4}$

3) $P_{n,3}$ เมื่อ $n \geq 3$ 4) $P_{n+1,2}$ เมื่อ $n \geq 1$

วิธีทำ 1) $P_{5,5} = 5! = 120$

2) $P_{7,4} = \dfrac{7!}{(7-4)!} = \dfrac{7!}{3!} = 4.5.6.7$

$P_{7,4} = 840$

3) $P_{n,3} = \dfrac{n!}{(n-3)!} = \dfrac{7!}{3!} = 4.5.6.7$

4) $P_{n+1,2} = \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = (n+1)n = n^2 + n$

ooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่า n เมื่อ $3(P_{2n+4}, 3) = 2(P_{n+4}, 4)$

วิธีทำ

$$3(P_{2n+4}, 3) = 2(P_{n+4}, 4)$$

$$\frac{3(2n+4)!}{(2n+4-3)!} = \frac{2(n+4)!}{(n+4-4)!}$$

$$\frac{3(2n+4)!}{(2n+1)!} = \frac{2(n+4)!}{(n)!}$$

$$\frac{(2n+4)(2n+3)(2n+2)}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{4(n+2)(2n+3)(n+1)}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{2}{3}$$

$$6(2n+3) = (n+4)(n+3)$$

$$12n + 18 = n^2 + 7n + 12$$

$$n^2 - 5n - 6 = 0$$

$$(n-6)(n+1) = 0$$

จะได้ $n = 6, -1$ (ค่า -1 ใช้ไม่ได้เพราะทำให้ $2n + 4 < 3$

ดังนั้น n เท่ากับ 6

ooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 15 สโมสรแห่งหนึ่งมีสมาชิก 15 คน จะเลือกประธาน รองประธานและเหรัญญิกได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ การเลือกประธาน รองประธานและเหรัญญิก มีจำนวนวิธีเท่ากับจัดเรียงคน 15 คนทีละ

3 คน เท่ากับ $P_{15,3}$

$$P_{15,3} = \frac{15!}{(15 \quad 3)!}$$

$$= \frac{15!}{12!}$$

$$= 15.14.13$$

$$= 2,730$$

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกประธาน และเหรัญญิกจากคน 15 คน ทำได้ 2,730 วิธี

ooooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 16 จงหาจำนวนวิธีที่จัดคน 6 คน ยืนเป็นแถวตรง ในจำนวนนี้มีนายสมัยและนายสามารถรวมอยู่ด้วย โดย

1) นายสมัยและนายสามารถต้องการยืนติดกันเสมอ

2) นายสมัยและนายสามารถไม่ต้องการยืนติดกัน

วิธีทำ 1) กรณีที่ 1 นายสมัยยืนอยู่หน้านายสามารถ จัดรวมกันคนอีก 4 คน

จัดเรียงได้ 5! = 120 วิธี

กรณีที่ 2 นายสามารถยืนอยู่หน้านายสมัย จัดรวมกับคนอีก 4 คน

จัดเรียงได้ 5! = 120 วิธี

จำนวนวิธีในการจัดเรียงให้นายสมัยยืนติดกับนายสามารถทำได้เท่ากับ 2(5!)

หรือ 2(120) = 240 วิธี

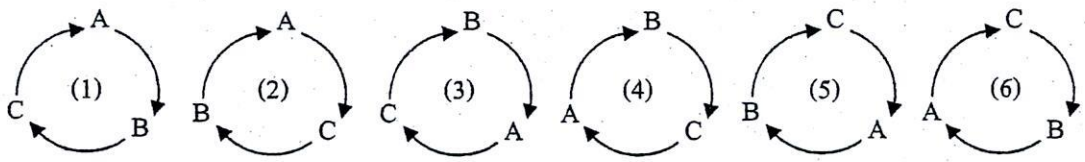
2) จำนวนวิธีในการจัดเรียงคนทั้ง 6 คน ยืนในแนวตรงเท่ากับ $P_{6,6} = 6! = 720$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่นายสมัยและนายสามารถยืนไม่ติดกัน เท่ากับ 720 – 240 = 480 วิธี

ooooooooooooooooooooooooo

ในการจัดเรียงลำดับสิ่งของอีกรูปแบบหนึ่งที่มักจะพบเสมอ คือ การจัดเรียงสิ่งของในเชิงวงกลมซึ่งจะมีแนวคิดที่แตกต่างจากการเรียงสิ่งของในแนวตรง เพราะการเรียงเชิงวงกลมจะไม่มีหัวแถวกับท้าย เช่น เมื่อเรียงตัวอักษร A , B และ C ในแนวตรง จะได้ 6 วิธี ดังนี้ ABC , ACB , BAC , BCA , CAB และ CBA

ถ้านำมาเรียงเป็นวงกลม จะได้ดังรูป



จากรูปแบบการจัดเรียงเป็นวงกลม พบว่ารูปแบบที่ (1) , (4) และ (5) มีรูปแบบการจัดเรียงเหมือนกัน คือ ซ้ายมือของ A เป็น B ซ้ายมือของ B เป็น C และซ้ายมือของ C เป็น A เหมือนกัน ใน

ทำนองเดียวกันรูปแบบที่ (2) , (3) และ (6) มีรูปแบบการจัดเรียงเหมือนกัน คือ ซ้ายมือของ A เป็น C ซ้ายมือของ C เป็น B และซ้ายมือของ B เป็น A เหมือนกัน จากจำนวน 6 วิธีในแนวตรงจึงเหลือเพียง 2 วิธีเท่านั้น ดังนั้น ในการจัดเรียงสิ่งของในเชิงวงกลมจึงมีแนวคิดต่างไปจากการจัดเรียงสิ่งของในแนวตรง

แนวคิดที่เหมาะสมที่จะหาจำนวนวิธีในการจัดเรียงสิ่งของที่แตกต่างกันเป็นวงกลม คือ กำหนดให้ของสิ่งหนึ่งจากทั้งหมดอยู่ในตำแหน่งคงที่ตำแหน่งหนึ่ง แล้วจึงจัดเรียงสิ่งของที่เหลือเหมือนกับการจัดเรียงเป็นแนวตรง เช่น ในการจัดเรียงตัวอักษร A , B และ C เป็นวงกลม กำหนดให้ A อยู่ในตำแหน่งคงที่ตำแหน่งหนึ่ง แล้วจัดเรียง B กับ C ในแนวตรงได้ 2! เท่ากับ 2 วิธี ดังกล่าว

สรุป เมื่อมีของที่แตกต่างกัน n สิ่ง นำมาจัดเรียงเป็นวงกลมกำหนดให้ของสิ่งหนึ่งอยู่ในตำแหน่งคงที่จึงจัดเรียงของที่เหลือในแนวตรง

กฎข้อที่ 5 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมด เท่ากับ $(n-1)!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 17 จำนวนวิธีที่จัดคน 5 คน ให้นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลมที่มี 5 ที่นั่งมีกี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีที่จัดคน 5 คน นั่งเป็นวงกลมซึ่งมีที่นั่ง 5 ที่นั่ง $= (5-1)!$ วิธี

$= 4!$ วิธี

$= 24$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จัดคน 5 คน นั่งเป็นวงกลมเท่ากับ 24 วิธี

ooooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 18 จำนวนวิธีจัดคน 6 คน ซึ่งมีนายสนิทกับนายสนมเป็นสามีภรรยากันเข้านั่งรอบโต๊ะกลมที่มี 6 ที่นั่ง โดยนายสนิทกับนางสนมนั่งติดกันเสมอ มีกี่วิธี

วิธีทำ ให้นายสนิทกับนางสนมนั่งก่อนโดย

กรณีที่1 ให้นายสนิทอยู่ทางขวาของนางสนม

จัดเรียงคนที่เหลือ 4 คนนั่ง ทำได้ $4! = 24$ วิธี

(มีนายสนิทกับนางสนมนั่งในตำแหน่งคงที่แล้ว)

กรณีที่ 2 ให้นายสนิทอยู่ทางซ้ายของนางสนม

จัดเรียงคนที่เหลือ 4 คนนั่ง ทำได้ $4! = 24$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดคนทั้ง 6 คนนั่งเป็นวงกลม โดยมีนายสนิทนั่งติดกับนางสนม ทำได้เท่ากับ $2(4!) = 2(24) = 48$ วิธี

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงหาค่าของ

1) $P_{6,6}$ = ...

= .....

2) $P_{9,3}$ = ...

= .....

3) $P_{n+1,n}$ = ...

= .....

4) $P_{n+r,n}$ = ...

= .....

2. จงหาค่า n เมื่อกำหนด

1) $7(P_{n,3}) = 6(P_{n+1,3})$

.....

.....

.....

.....

.....

2) $3(P_{n,4}) = P_{n-1,5}$

.....

.....

.....

.....

.....

3. จำนวนเต็มบวกที่มี 3 หลัก ที่สร้างจากตัวเลข 1 , 2 , 3 , ... 9 โดยแต่ละหลักไม่ซ้ำกันมีกี่จำนวน

.....

.....

.....

.....

.....

4. มีธงสีต่าง ๆ กัน 6 ผืน จะสร้างสัญญาณธงในแนวตรงได้กี่วิธี เมื่อ

1) ใช้ธง 1 ผืน

.....

.....

2) ใช้ธง 2 ผืน

.....

.....

2) ใช้ธง 3 ผืน

.....

.....

4) ใช้ธง 4 ผืน

.....

.....

5) ใช้ธง 5 ผืน

.....

.....

6) ใช้ธง 6 ผืน

.....

.....

7) ใช้ธงตั้งแต่ 1 ผืนถึง 6 ผืน

.....

.....

5. จะจัดนักเรียนชาย 4 คน และหญิง 4 คน ยืนเป็นแถวตรงได้ทั้งหมดกี่วิธี เมื่อ

1) ไม่มีข้อกำหนดเพิ่มเติม

.....

.....

2) ชายกับหญิงยืนสลับกัน

.....

.....

6. ในการประชุมสมาชิกอาเซี่ยนครั้งหนึ่งมีผู้เข้าร่วมประชุม 15 คน โดยจัดให้นั่งประชุมรอบโต๊ะกลม จะได้ผู้เข้าร่วมประชุมนั่งได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

.....

.....

7. ต้องการร้อยดอกไม้ 6 ชนิด ที่แตกต่างกันเพื่อทำพวงมาลัยถวายพระ จะร้อยพวงมาลัยที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่แบบ

.....

.....

8. ต้องการทำสร้อยคอจากลูกปัด 10 ลูก สีต่าง ๆ กัน จะทำสร้อยคอที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่แบบ

.....

.....

9. จะจัดนักเรียนชาย 4 คน และหญิง 4 คน ยืนเป็นวงกลมได้ทั้งหมดกี่วิธี เมื่อ

1) ไม่มีข้อกำหนดเพิ่มเติม

.....

.....

2) ชายและหญิงยืนสลับกัน

.....

.....

10. จะจัดชาย 8 คน ยืนเป็นแถวตรง โดยในจำนวน 8 คนนี้มีนายสมบัติและนายสมชาติเป็นพี่น้องกันเมื่อ

1) นายสมบัติและนายสมชาติต้องยืนติดกันเสมอ

.....

.....

2) นายสมบัติและนายสมชาติยืนไม่ติดกัน

.....

.....

11. จากโจทย์ในข้อ 10 ถ้าในจำนวน 8 คนนั้นมีนายสมคิดซึ่งเป็นเพื่อนกับนายสมบัติและนายสมชาติ จะมีวิธีจัดให้คนทั้งสามยืนติดกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

.....

.....

12. จะจัดคน 8 คน มีนายอุดมและนางรัชนีซึ่งเป็นสามีภรรยากันรวมอยู่ด้วย จะจัดคนทั้ง 8 คนนี้ เข้าร่วมรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลมได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี เมื่อ

1) นายอุดมและนางรัชนีต้องนั่งติดกันเสมอ

.....

.....

2) นายอุดมและนางรัชนีไม่ได้นั่งติดกัน

.....

.....

ooooooooooooooooooooooooo

4. วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน

ในการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่กล่าวมา ไม่ว่าจะเป็นการเรียงในรูปเชิงเส้น หรือเชิงวงกลม เกิดจากสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด แต่ถ้าต้องการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของบางสิ่งซ้ำกัน จำนวนวิธีที่เรียงสับเปลี่ยนได้จะแตกต่างออกไปอย่างไร

พิจารณาจำนวนที่เกิดจากการเรียงของตัวเลข 1 , 2 , 3 และ 4 ดังนี้

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

ถ้าแทนเลข 4 ด้วยเลข 1 จะได้จำนวนดังนี้

1231	1213	1321	1312	1123	1132
2131	2113	2311	2311	2113	2131
3121	3112	3211	3211	3112	3121
1123	1132	1213	1231	1312	1321

จะเห็นได้ว่าเมื่อแทนเลข 4 ด้วยเลข 1 จะเกิดจำนวนที่ซ้ำกัน ทำให้ได้จำนวนที่แตกต่างกันทั้งหมดเพียง 12 จำนวนเท่ากัน

จากการเรียงตัวเลข 1 , 2 , 3 และ 4 จำนวนวิธี $= 4! = 24$ วิธี

จากการเรียงตัวเลข 1 , 2 , 3 และ 1 จำนวนวิธี $= 12 = \frac{4!}{2}$ วิธี

จำนวนที่ได้ใหม่เป็น $\frac{1}{2}$ เท่าของจำนวนเต็ม

ชวนคิด

พิจารณาจำนวนที่ได้จากการเรียงตัวเลข 1 , 2 , 3 และ 4 เป็น 1 และเปลี่ยนเลข 3 เป็นเลข 2 นับจำนวนที่ได้ใหม่มีกี่จำนวนและลดลงไปเป็นกี่เท่าของจำนวนเดิม

.....

.....

.....

ในการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ที่มีบางสิ่งเหมือนกัน จึงพิจารณาจากจำนวนวิธีที่เรียงของนั้นแตกต่างกันทั้งหมด และจำนวนวิธีใหม่ที่ได้จะลดลงไปเป็นกี่เท่าของจำนวนวิธีเดิม

กฎข้อที่ 6 ถ้ามีสิ่งของ n สิ่ง ในจำนวนนี้มี n_1 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง มี n_2 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่สอง ... และมี n_k สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + n_3 + n_k = n$ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้ง n สิ่งเท่ากับ $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_k!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 19 จงหาจำนวนที่แตกต่างกันทั้งหมดที่ได้จากการเรียงตัวเลข 1 , 1 , 2 , 2 , 3 และ 3 โดยเรียงทั้งหมด 6 ตัว ว่ามีกี่จำนวน

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 6$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$ และ $n_3 = 2$

จำนวนที่ได้จากการเรียงสับเปลี่ยน $= \dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!} = \dfrac{6!}{2!2!2!}$

ดังนั้น จำนวนที่แตกต่างกันทั้งหมดมี 90 จำนวน

ooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 20 ในการนำตัวอักษรจากคำว่า " STATISTICCS" มาจัดเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดจะได้กี่วิธี

วิธีทำ จากคำว่า " STATISTICCS" มีอักษรทั้งหมด 10 ตัว

มี S จำนวน 3 ตัว , T จำนวน 3 ตัว , I จำนวน 2 ตัว , A จำนวน 1 ตัว และ C จำนวน 1 ตัว

ให้ $n = 10$, $n_1 = 3$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, $n_4 = 1$ และ $n_5 = 1$

จะได้จำนวนวิธีทั้งหมดที่แตกต่างกันในการเรียงสับเปลี่ยน $= \dfrac{10!}{3!3!2!1!1!} = 50{,}400$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่แตกต่างกันในการเรียงสับเปลี่ยน เท่ากับ 50,400 วิธี

ooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 21 นำลูกปิงปองสีส้มที่เหมือนกัน 3 ลูก สีขาวที่เหมือนกัน 2 ลูก และสีเหลืองที่เหมือนกัน 4 ลูก แจกให้กับเด็ก 9 คน คนละ 1 ลูก ได้ทั้งหมดกี่วิธีที่แตกต่างกัน

วิธีทำ ในที่นี้ $n = 9$, $n_1 = 3$, $n_2 = 3$ และ $n_3 = 4$

จำนวนวิธีทั้งหมดที่แตกต่างกัน $= \dfrac{9!}{3!2!4!} = 1{,}260$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่แตกต่างกันในการแจกลูกปิงปอง เท่ากับ 1,260 วิธี

ooooooooooooooooooooooo

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จำนวนที่มี 8 หลัก ซึ่งสร้างจากตัวเลข 2 , 2 , 2 , 4 , 4 , 4 , 5 และ 5 มีทั้งหมดกี่จำนวนที่แตกต่างกัน

   .....

   .....

2. จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมดจากการเรียงตัวอักษรทุกตัวในคำว่า

   1) "ELEMENT"

   .....

   .....

   2) "MATHEMATICS"

   .....

   .....

   3) "COMMUNICATION"

   .....

   .....

   4) "INSTITUTION"

   .....

   .....

3. ทีมฟุตบอลลิเวอร์พลูมีกำหนดแข่งขันรอบแรก 8 ครั้ง จำนวนวิธีทั้งหมดที่ทีมนี้จะชนะ 4 ครั้ง เสมอ 2 ครั้ง และแพ้ 2 ครั้ง มีกี่วิธี

   .....

   .....

   .....

4. ในการโยนเหรียญห้าบาท 1 เหรียญ 5 ครั้ง จำนวนวิธีที่จะเกิดหัว 3 ครั้ง และก้อย 2 ครั้ง มีกี่วิธี

   .....

   .....

   .....

5. มีเสื้อสีฟ้าเหมือนกัน 4 ตัว เสื้อสีขาวเหมือนกัน 3 ตัว และเสื้อสีม่วงเหมือนกัน 2 ตัว จะมีวิธีจัดเรียงเสื้อทั้ง 9 ตัว บนราวแขวนเสื้อแนวตรงได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

   .....

   .....

   .....

6. มีหนังสือคณิตศาสตร์เหมือนกัน 3 เล่ม หนังสือฟิสิกส์เหมือนกัน 3 เล่ม หนังสือเคมีเหมือนกัน 3 เล่ม จะมีวิธีจัดเรียงหนังสือทั้ง 9 เล่ม บนชั้นวางหนังสือได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

.....

.....

.....

ooooooooooooooooooooooooo

5. วิธีจัดหมู่

ได้ทราบมาแล้วว่าการนับจำนวนวิธีโดยการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของต่าง ๆ จะต้องคำนึงถึงหลักของการจัดเรียงสิ่งของเหล่านั้นด้วย แต่ในบางครั้งบางการนับจำนวนวิธีหรือหาผลของงานไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงลำดับก็ได้

ตัวอย่างที่ 22 กำหนดเซต A = {1 , 2 , 3 , 4 , 5} จงหาว่าสับเซต A ที่มีสมาชิก 3 ตัวมีกี่สับเซต

วิธีทำ สับเซตที่มีสมาชิก 3 ตัวของเซต A แจกแจงได้ ดังนี้

{1 , 2 , 3} , {1 , 2 , 4} , {1 , 2 , 5} , {1 , 3 , 4} และ {1 , 3 , 5} ,

{1 , 4 , 5} , {2 , 3 , 4} , {2 , 3 , 5} , {2 , 4 , 5} และ {3 , 4 , 5}

ดังนั้น สับเซต A ที่มีสมาชิก 3 ตัวมี 10 เซต

ooooooooooooooooooooooooo

ถ้ากำหนดให้เลือกตัวเลข 3 ตัว จากตัวเลข 5 ตัว คือ 1 , 2 , 3 , 4 และ 5 ก็สามารถหาจำนวนวิธีในการเลือกได้เช่นเดียวกับในตัวอย่างที่ 22 ซึ่งจำนวนวิธีในการเลือกตัวเลข 3 ตัวจาก 5 ตัว ดังกล่าวเท่ากับ 10 วิธี จะเห็นว่าการเลือกได้จำนวนดังกล่าวไม่ได้คำนึงถึงลำดับของตัวเลขที่เลือกได้เลย ในที่นี้จะเรียกวิธีการเลือกสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง มาทีละ r สิ่ง ($r \leq n$) ว่าวิธีจัดหมู่ของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยมีหมู่ละ r สิ่ง ซึ่งก็เท่ากับการหาเซตที่มีสมาชิก r ตัว จากเซตที่มีสมาชิก n ตัวที่กำหนดให้ และในที่นี้จะเขียนแทนจำนวนวิธีจัดหมู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยจัดหมู่ละ r สิ่ง ด้วยสัญลักษณ์ $C_{n,r}$ หรือ $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$

พิจารณาถ้ากำหนดตัวอักษร A , B , C , D และ E ถ้านำตัวอักษรมาจัดเรียงสับเปลี่ยนทีละ 3 ตัว จะได้จำนวนวิธี $= P_{5,3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$ วิธี แต่ถ้าให้เลือกตัวอักษรทีละ 3 ตัว จะได้จำนวนวิธีเท่ากับ 10 วิธี ซึ่งวิธีเรียงสับเปลี่ยน ABC , ACB , BAC , BCA , CAB และ CBA ถือเป็นวิธีจัดหมู่วิธีเดียวกัน ซึ่งมี 6 วิธี เท่ากับ 3! และในหมู่อื่น ๆ ที่มีอักษร 3 ตัว ก็จะมีวิธีจัดเรียงได้ 6 วิธี หรือ 3! เช่นเดียวกัน

ถ้าเขียนแทนวิธีจัดหมู่ของที่แตกต่างกัน 5 สิ่ง ทีละ 3 สิ่งด้วย $C_{5,3}$ จะได้

$$3!\,C_{5,3} = P_{5,3}$$

ดังนั้น

$$C_{5,3} = \frac{P_{5,3}}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

โดยทั่วไป ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่ง เมื่อ $r \leq n$ คือ $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (จากกฎข้อที่ 4) แต่ในการจัดหมู่ของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทีละ r สิ่ง เมื่อ $r \leq n$ ซึ่งเราไม่คำนึงถึงลำดับของการเรียงในของ r สิ่งนั้น ๆ

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดหมู่ $C_{n,r} = \frac{P_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

กฎข้อที่ 7 จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันหมู่ละ r สิ่ง เมื่อ $r \leq n$ เท่ากับ $\frac{n!}{r!(n-r)!}$

จากกฎข้อที่ 7 จะได้ $C_{n,r} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

ตัวอย่างที่ 23 จงหาค่าของ

1) $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

วิธีทำ 1) $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{8!}{0!(8-0)!} = \frac{8!}{1!8!} = 1$

2) $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = 56$

3) $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = 56$

4) $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{8!}{8!(8-8)!} = \frac{8!}{8!0!} = \frac{8!}{8!(1)} = 1$

5) $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{8!}{1!(8-1)!} = \frac{8!}{1!7!} = 8$

ooooooooooooooooooooooo

ชวนคิด

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ ถ้าเป็นเท็จให้ยกตัวอย่างประกอบด้วย กำหนด n , r เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $r \leq n$

1) $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ 2) $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$

3) $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 24 บริษัทแห่งหนึ่งต้องการพนักงานทำความสะอาด 3 คน แต่มีผู้สมัครมา 7 คน จะมีวิธีเลือกคนทั้ง 7 คน เข้าทำงานได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ต้องการเลือกคน 3 คน จากทั้งหมด 7 คน

จำนวนวิธีเลือกที่แตกต่างกันทั้งหมด $= \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} = \dfrac{7!}{3!4!} = 35$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่เลือกคน 3 คน จาก 7 คน เท่ากับ 35 วิธี

ตัวอย่างที่ 25 กำหนดเซต A มีสมาชิก 5 ตัว จงหา

1) จำนวนสับเซตของเซต A ที่ไม่มีสมาชิกเลย
2) จำนวนสับเซตของเซต A ที่มีสมาชิก 1 ตัว
3) จำนวนสับเซตของเซต A ที่มีสมาชิก 2 ตัว
4) จำนวนสับเซตของเซต A ที่มีสมาชิก 3 ตัว
5) จำนวนสับเซตของเซต A ที่มีสมาชิก 4 ตัว
6) จำนวนสับเซตของเซต A ที่มีสมาชิก 5 ตัว
7) จำนวนสับเซตทั้งหมดของเซต A

วิธีทำ 1) จำนวนสับเซตของเซต A ที่ไม่มีสมาชิกเลย คือ จำนวนวิธีที่ไม่เลือกสมาชิกมาเลย จากสมาชิก 5 ตัว จะได้จำนวนสับเซต $= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ (คือ เซตว่าง)

ดังนั้น จำนวนสับเซตที่ไม่มีสมาชิกเลยเท่ากับ 1 เซต

2) จำนวนสับเซตของเซต A ที่มีสมาชิก 1 ตัว คือ จำนวนวิธีที่เลือกสมาชิกมาทีละ 1 ตัว จากสมาชิก 5 ตัว จะได้จำนวนสับเซต $= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$

ดังนั้น จำนวนสับเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว เท่ากับ 5 เซต

3) จำนวนสับเซตของเซต A ที่มีสมาชิก 2 ตัว คือ จำนวนวิธีที่เลือกสมาชิกมาทีละ 2 ตัว จากสมาชิก 5 ตัว จะได้จำนวนสับเซต $= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$

ดังนั้น จำนวนสับเซตที่มีสมาชิก 2 ตัว เท่ากับ 10 เซต

4) จำนวนสับเซตของเซต A ที่มีสมาชิก 3 ตัว คือ จำนวนวิธีที่เลือกสมาชิกมาทีละ 3 ตัว จากสมาชิก 5 ตัว จะได้จำนวนสับเซต $= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$

ดังนั้น จำนวนสับเซตที่มีสมาชิก 3 ตัว เท่ากับ 10 เซต

5) จำนวนสับเซตของเซต A ที่มีสมาชิก 4 ตัว คือ จำนวนวิธีที่เลือกสมาชิกมาทีละ 4 ตัว จากสมาชิก 5 ตัว จะได้จำนวนสับเซต $= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{4!1!} = 5$

ดังนั้น จำนวนสับเซตที่มีสมาชิก 4 ตัว เท่ากับ 5 เซต

6) จำนวนสับเซตของเซต A ที่มีสมาชิก 5 ตัว คือ จำนวนวิธีที่เลือกสมาชิกมาทีละ 5 ตัว จากสมาชิก 5 ตัว จะได้จำนวนสับเซต $= \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{5!0!} = 1$

ดังนั้น จำนวนสับเซตที่มีสมาชิก 5 ตัว เท่ากับ 1 เซต

7) จำนวนสับเซตทั้งหมดของเซต A $= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$= 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$

ดังนั้น จำนวนสับเซตทั้งหมดของเซต A เท่ากับ 32 หรือ 2^5 เซต

ชวนคิด

จากการหาสับเซตทั้งหมดของเซต A ที่มีสมาชิก n ตัว จงพิจารณา และสรุปข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ ถ้าเป็นเท็จให้ยกตัวอย่างประกอบ

$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 2^n$

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 26 กำหนดจำนวนบวกที่แตกต่างกันให้ 4 จำนวน และจำนวนลบที่แตกต่างกัน 4 จำนวน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกจำนวนเหล่านี้มา 4 จำนวน แล้วผลคูณของจำนวนทั้ง 4 เป็นบวก

วิธีทำ จำนวน 4 จำนวน ที่คูณกันได้จำนวนบวก

กรณีที่ 1 จำนวนทั้ง 4 เป็นจำนวนบวกเลือกได้ $= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 1$ วิธี

กรณีที่ 2 จำนวนทั้ง 4 เป็นจำนวนลบเลือกได้ $= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 1$ วิธี

กรณีที่ 3 จำนวนทั้ง 4 เป็นจำนวนบวก 2 จำนวนและจำนวนลบ 2 จำนวนเลือกได้

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \times 6 = 36$ วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกจำนวนดังกล่าว $= 1 + 1 + 36 = 38$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกจำนวนดังกล่าวเท่ากับ 38 วิธี

ooooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 27 มีหลอดไฟลักษณะเดียวกัน 10 หลอด เป็นหลอดดี 7 หลอด และหลอดเสีย 3 หลอด จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะหยิบหลอดไฟเหล่านี้มา 3 หลอด แล้วได้หลอดเสียอย่างน้อย 1 หลอด

วิธีทำ จำนวนวิธีที่จะหยิบให้ได้หลอดเสียอย่างน้อย 1 หลอด

กรณีที่ 1 หยิบได้หลอดเสีย 1 หลอด หลอดดี 2 หลอด

จำนวนวิธี $= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \times 21 = 63$ วิธี

กรณีที่ 2 หยิบได้หลอดเสีย 2 หลอด หลอดดี 1 หลอด

จำนวนวิธี $= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \times 7 = 21$ วิธี

กรณีที่ 3 หยิบได้หลอดเสีย 3 หลอด หลอดดี 0 หลอด

จำนวนวิธี $= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 = 1$ วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะหยิบได้หลอดเสียอย่างน้อย 1 หลอด $= 63 + 21 + 1 = 85$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะหยิบได้หลอดเสียอย่างน้อย 1 หลอด เท่ากับ 85 วิธี

ooooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 28 มีจุด A , B , C , D , E , F , G และ H ทั้งหมด 8 จุด อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่งจงหา

1) จำนวนคอร์ดทั้งหมดที่เกิดจากการเชื่อมจุดเหล่านี้
2) จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอด

วิธีทำ 1) จำนวนคอร์ดทั้งหมดที่เกิดจากการลากเส้นเชื่อมต่อทีละ 2 จุด จากจุดเหล่านี้เท่ากับจำนวนวิธีเลือกจุดทีละ 2 จุด จากจุดเหล่านี้ (จุด 2 จุด ที่เลือกได้แต่ละคู่จะเท่ากับคอร์ด 1 เส้น)

ดังนั้น จำนวนคอร์ดทั้งหมด $= \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = 28$ เส้น

2) จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอดเท่ากับจำนวนวิธีเลือกจุดทีละ 3 จุด จากจุดเหล่านี้ (จุด 3 จุดที่เลือกได้แต่ละกลุ่มจะเท่ากับรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดเหล่านั้นเป็นจุดยอด 1 รูป)

ดังนั้น จำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมด $= \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$ เส้น

แบบฝึกหัดที่ 5

1. จงหา

1) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ = ...

= .....

= .....

2) $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ = ...

= .....

= .....

3) $\begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix}$ = ...

= .....

= .....

4) $\begin{pmatrix} n+1 \\ n-1 \end{pmatrix}$ = ...

= .....

= .....

5) $\begin{pmatrix} n+1 \\ r \end{pmatrix}$ = ...

= .....

= .....

2. จงหา

1) จงหาค่า n จาก $\begin{pmatrix} n+2 \\ n \end{pmatrix} = 45$

.....

.....

2) กำหนดให้ $\begin{pmatrix} 18 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ r+2 \end{pmatrix}$ จงหาค่าของ $\begin{pmatrix} r \\ 5 \end{pmatrix}$

.....

.....

3) กำหนดให้ $\begin{pmatrix} n \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 5 \end{pmatrix}$ จงหาค่าของ $\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}$

.....

.....

4) กำหนดให้ $24C_{n,r} = P_{n,r}$ จงหาค่าของ $\binom{r}{2}$

.....

.....

.....

3. ในการแข่งขันฟุตบอลแบบพบกันทั้งหมด ถ้ามีทีมเข้าแข่งขัน 10 ทีม จะต้องจัดการแข่งขันทั้งหมดกี่ครั้ง

.....

.....

.....

4. มีนักเทนนิสทีมชาติไทยชาย 6 คน ในที่นี้มีนายภราดรรวมอยู่ด้วย จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกนักเทนนิสเหล่านี้ลงแข่งขันกับทีมชาติอเมริกันในประเภทชายคู่โดยมีนายภราดรรวมอยู่ด้วย

.....

.....

.....

5. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่นักศึกษาคนหนึ่งจะเลือกวิชาเลือก 3 วิชา จากวิชาเลือกที่กำหนดให้ 10 วิชา

.....

.....

.....

6. ในการสอบปลายภาควิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งมีข้อสอบทั้งหมด 15 ข้อ แต่อาจารย์กำหนดให้เลือกทำเพียง 10 ข้อ จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่นักเรียนคนหนึ่งจะเลือกทำข้อสอบได้

.....

.....

.....

7. ในสำนักงานแห่งหนึ่งมีพนักงานชาย 6 คน และพนักงานหญิง 5 คน จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกพนักงานเหล่านี้มา 4 คน โดยที่เป็นพนักงานชาย 2 คน และพนักงานหญิง 2 คน

.....

.....

.....

8. กำหนดเซต A = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6} จงหา

1) จำนวนสับเซตของเซต A ที่ไม่มีสมาชิก

.....

.....

.....

.....

2) จำนวนสับเซตของเซต A ที่มีสมาชิก 3 ตัว

.....

.....

.....

.....

3) จำนวนสับเซตทั้งหมดของเซต A

.....

.....

.....

.....

4) จำนวนสับเซตแท้ทั้งหมดของเซต A

.....

.....

.....

.....

9. นักเรียนคนหนึ่งต้องการช่วยแม่ทำงานบ้านโดยมีงานบ้านให้เลือก คือ กวาดบ้าน ล้างจาน ซักผ้า รีดผ้า และเลี้ยงน้อง จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่นักเรียนคนนี้จะช่วยแม่ทำงานบ้านอย่างน้อย 3 งาน

.....

.....

.....

.....

10.นักเรียนคนหนึ่งมีเพื่อน 6 คน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่เขาจะเชิญเพื่อนมาเที่ยวที่บ้านอย่างน้อย 1 คน

.....

.....

.....

.....

11.มีจำนวนบวกที่แตกต่างกัน 4 จำนวน จำนวนลบที่แตกต่างกัน 4 จำนวน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกจำนวนเหล่านี้มา 4 จำนวน แล้วมีผลคูณของจำนวนทั้ง 4 เป็นลบ

.....

.....

.....

.....

12.ในงานเลี้ยงอาหารงานหนึ่ง มีอาหารคาว 5 อย่าง ของหวาน 3 อย่าง และผลไม้ 4 ชนิด จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ชายคนหนึ่งจะเลือกได้อาหารคาว 2 อย่าง ของหวาน 1 อย่าง และผลไม้ 2 ชนิด

.....

.....

.....

.....

13.จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะแบ่งคน 6 คน เข้าห้องพัก 3 ห้อง โดยห้องแรกพักได้ 3 คน ห้องที่สองพักได้ 2 คน ห้องสุดท้ายพักได้ 1 คน มีกี่วิธี

.....

.....

.....

.....

14.มีหนังสือคณิตศาสตร์ 4 เล่ม หนังสือฟิสิกส์ 3 เล่ม หนังสือเคมี 2 เล่ม นักเรียนคนหนึ่งต้องการหนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่ม หนังสือฟิสิกส์ 2 เล่ม และหนังสือเคมี 1 เล่ม เขาจะมีวิธีเลือกหนังสือที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

.....

.....

.....

.....

15.มีจุด 100 จุด อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งจะลากคอร์ดได้ทั้งหมดกี่เส้น

.....

.....

.....

.....

ooooooooooooooooooooooo

6. ความน่าจะเป็น (Probability)

ในการกล่าวถึงโอกาสที่เกิดขึ้นของเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่ง เช่น โอกาสที่น้ำจะท่วมหลังฝนตก โอกาสที่นักเรียนจะสอบผ่านในวิชาต่าง ๆ หรือโอกาสที่จะได้บุตรเป็นชายหรือหญิง จำเป็นต้องอาศัยข้อมูลบางประการเกี่ยวกับเหตุการณ์นั้น ๆ ในการกล่าวถึงความน่าจะเป็นมีข้อตกลงที่ควรรู้ดังนี้

6.1 การทดลองสุ่ม (Random Experiment)

การทดลองสุ่ม คือ การทดลองที่ทราบว่าผลการทดลองอาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้อย่างถูกต้องแน่นอนว่าในแต่ละครั้งที่ทดลองผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไร ในบรรดาผลที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดนั้น

ตัวอย่างของการทดลองสุ่ม

- โยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง เราทราบว่าผลคือ เหรียญจะต้องหงายหัวหรือก้อยเท่านั้น แต่ไม่สามารถบอกล่วงหน้าว่าจะหงายหัวหรือก้อยจกการโยนเหรียญแต่ละครั้ง
- ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เราทราบว่าผลคือลูกเต๋าจะหงายแต้มตั้งแต่ 1 ถึง 6 เท่านั้น แต่ไม่สามารถบอกล่วงหน้าว่าจะหงายแต้มใดในการทอดแต่ละครั้ง
- หยิบลูกบอลมา 1 ลูก จากถุงที่มองไม่เห็นภายใน โดยที่ถุงบรรจุลูกบอลสีขาว 1 ลูก สีแดง 1 ลูก และสีเหลือง 1 ลูก เราทราบว่าจะหยิบได้ลูกบอลสีขาวหรือสีแดง หรือสีเหลือง แต่ไม่สามารถบอกล่วงหน้าได้ว่าจะได้สีใด

ตัวอย่างการทดลองที่ไม่เป็นการทดลองสุ่ม

- หยิบลูกบอล 1 ลูก จากถุงที่มีลูกบอลสีขาว 10 ลูก เพราะทราบว่าผลที่ได้คือหยิบได้ลูกบอลสีขาว
- นำแก๊สไฮโดรเจน 2 โมเลกุลรวมกับแก๊สออกซิเจน 1 โมเลกุล ผลที่ได้คือ เกิดน้ำ
- นำสังกะสีใส่ลงในกรดกำมะถันอย่างเจือจาง ผลคือเกิดแก๊สไฮโดรเจน

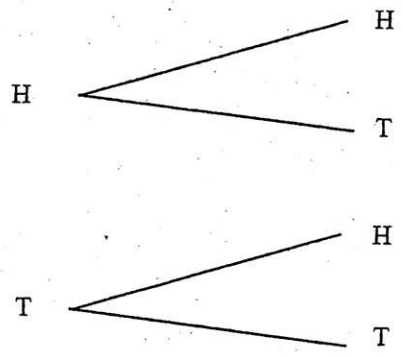
6.2 แซมเปิลสเปซ (Sample Space)

บทนิยาม แซมเปิลสเปซ คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่อาจจะเป็นไปได้ทั้งหมดจากการทดลองสุ่มในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์ S แทน แซมเปิลสเปซ

ตัวอย่างที่ 29 จงเขียนแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มต่อไปนี้

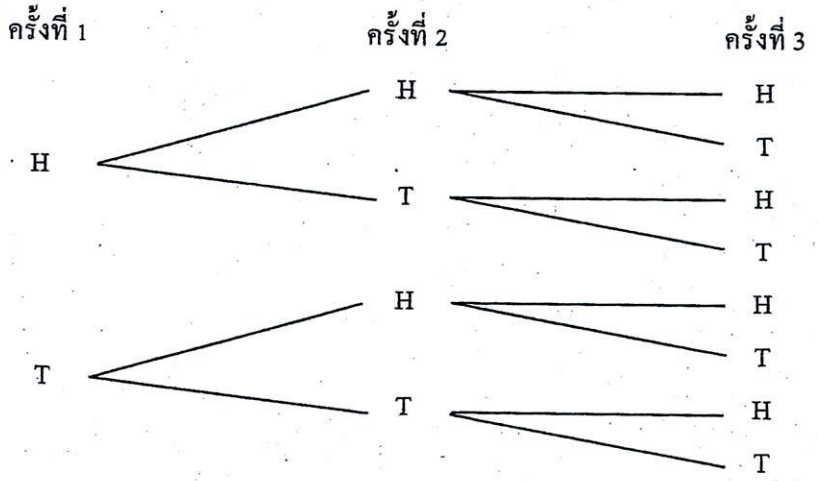
1) โยนเหรียญห้าบาท 1 เหรียญ 2 ครั้ง สนใจหน้าที่หงายทั้งหมด
2) โยนเหรียญห้าบาท 1 เหรียญ 3 ครั้ง สนใจหน้าที่หงายทั้งหมด
3) ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง สนใจหน้าที่หงายทั้งหมด
4) ทอดลูกเต๋า 1 ลูก และโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง สนใจหน้าที่หงายทั้งหมด

วิธีทำ 1) แซมเปิลสเปซของการโยนเหรียญห้าบาท 1 เหรียญ 2 ครั้ง



S = {(H,H) , (H,T) , (T,H) , (T,T)}

2) แซมเปิลสเปซของการโยนเหรียญห้าบาท 1 เหรียญ 3 ครั้ง

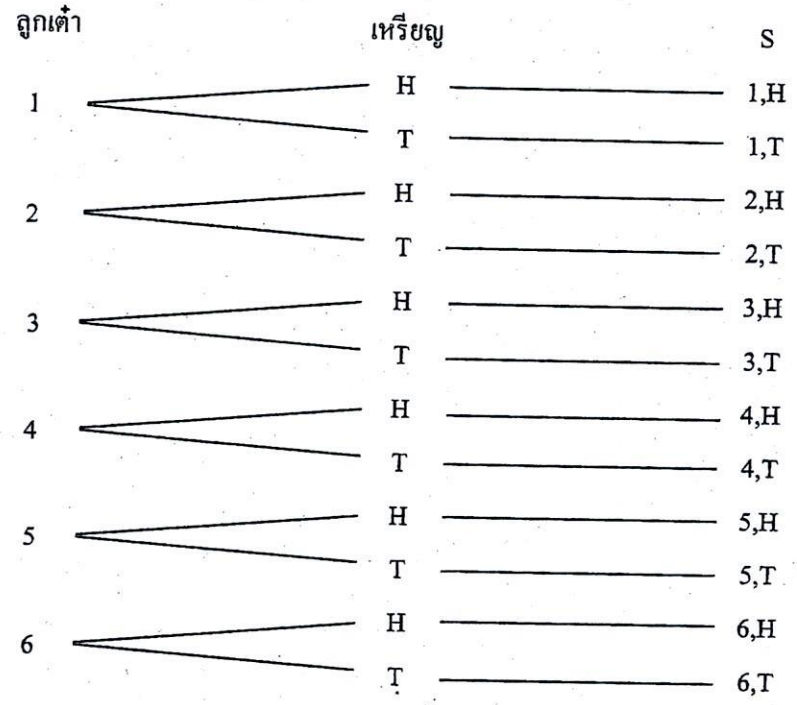


S = {(H,H,H) , (H,H,T) , (H,T,H) , (H,T,T) , (T,H,H) , (T,H,T) , (T,T,H) , (T;T,T)}

3) แซมเปิลสเปซของการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

S = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}

4) แซมเปิลสเปซของการทอดลูกเต๋า 1 ลูก และโยนเหรียญห้าบาท 1 เหรียญ อย่างละ 1 ครั้ง



S = {(1,H) , (1,T) , (2,H) , (2,T) , (3,H) , (3,T) , (4,H) , (4,T) , (5,H) , (5,T) , (6,H) , (6,T)}

ooooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 30 จงเขียนแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มต่อไปนี้

1) คะแนนสอบที่นักเรียนทำได้ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ที่มีคะแนนเต็ม 10 คะแนน

2) ผลการแข่งขันฟุตบอลของทีมแมนเชสเตอร์กับทีมลิเวอร์พูลสนใจผลการแข่งขันของทีมแมนเชสเตอร์

3) โยนเหรียญห้าบาทหนึ่งเหรียญ 3 ครั้ง สนใจจำนวนหัวที่เกิด

วิธีทำ 1) แซมเปิลสเปซของคะแนนสอบที่นักเรียนทำได้ คือ S = {0 , 1 , 2 , 3 , ... , 10}

2) แซมเปิลสเปซของผลการแข่งขันฟุตบอลของทีมแมนเชสเตอร์ คือ S = {ชนะ , เสมอ , แพ้}

3) แซมเปิลสเปซของจำนวนหัวที่เกิด คือ S = {0 , 1 , 2 , 3}

ooooooooooooooooooooooooo

6.3 เหตุการณ์

บทนิยาม เหตุการณ์ คือ สับเซตของแซมเปิลสเปซ ในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์ E แทน เหตุการณ์

ข้อสังเกต

1. เซตว่างถือเป็นเหตุการณ์หนึ่ง
2. แซมเปิลสเปซถือเป็นเหตุการณ์หนึ่ง

ตัวอย่างที่ 31 จงเขียนแซมเปิลสเปซและเหตุการณ์ต่อไปนี้

1) ผลของการมีบุตร 3 คน สนใจเหตุการณ์ที่ได้บุตรชายมากกว่าบุตรหญิง
2) หยิบได้ลูกบอลสีขาว 1 ลูก จากการหยิบลูกบอล 2 ลูก จากกล่องที่มีลูกบอลสีขาว สีแดง และสีฟ้า อย่างละ 1 ลูก

วิธีทำ 1) แซมเปิลสเปซของการมีบุตร 3 คน

S = {(ช , ช , ช) , (ช , ช , ญ) , (ช , ญ , ช) , (ช , ญ , ญ) , (ญ , ช ,ช) , (ญ , ช , ญ) , (ญ , ญ , ช) , (ญ , ญ , ญ)}

เหตุการณ์ที่บุตรชายมากกว่าบุตรหญิง

E = {(ช , ช ,ช) , (ช , ช , ญ) , (ช , ญ , ช) , (ญ , ช ,ช)}

2) แซมเปิลสเปซของการหยิบลูกบอล 2 ลูก

S = {(ขาว , แดง) , (ขาว , เขียว) , (ขาว , ฟ้า) , (แดง , เขียว) , (แดง , ฟ้า) , (เขียว , ฟ้า)}

เหตุการณ์ที่ได้สีขาว 1 ลูก

E = {(ขาว , แดง) , (ขาว , เขียว) , (ขาว , ฟ้า)}

ooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 32 ในการวัดส่วนสูงของนักเรียนแต่ละคนในชั้น ให้ S เป็นแซมเปิลสเปซของผลการวัดส่วนสูง มีหน่วยเป็นเซนติเมตร จงเขียนเหตุการณ์ต่อไปนี้

1) สนใจส่วนสูงของนักเรียนแต่ละคนในชั้นนั้นที่สูงตั้งแต่ 140 เซนติเมตร ถึง 160 เซนติเมตร
2) สนใจส่วนสูงของนักเรียนแต่ละคนในชั้นนั้นที่สูงกว่า 150 เซนติเมตร

วิธีทำ $S = \{H / H > 0\}$

ให้ E_1 แทน เหตุการณ์ที่นักเรียนมีส่วนสูงตั้งแต่ 140 เซนติเมตร ถึง 160 เซนติเมตร

และ E_2 แทน เหตุการณ์ที่นักเรียนมีส่วนสูงมากกว่า 150 เซนติเมตร

$E_1 = \{H / 140 \leq H \leq 160\}$

$E_2 = \{H / H > 150\}$

ooooooooooooooooooooooo

ยูเนียนของเหตุการณ์

ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์แล้วยูเนียนของเหตุการณ์ E_1 และ E_2 คือ เหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกของเหตุการณ์ E_1 หรือเหตุการณ์ E_2

เขียนแทนยูเนียนของเหตุการณ์ E_1 และ E_2 ด้วยสัญลักษณ์ $E_1 \cup E_2$

ตัวอย่างที่ 33 ทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน จงหาเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทั้งสองจะหงายแต้มเหมือนกัน หรือหงายแต้มรวมกันน้อยกว่า 5

วิธีทำ $S = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\}$

ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าสองลูกหงายแต้มเหมือนกัน

จะได้ $E_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

ให้ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าสองลูกหงายแต้มรวมกันน้อยกว่า 5

จะได้ $E_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$

$\therefore E_1 \cup E_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

ดังนั้น เหตุการณ์ดังกล่าว คือ $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

ooooooooooooooooooooooo

อินเตอร์เซกชันของเหตุการณ์

ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์แล้วอินเตอร์เซกชันของเหตุการณ์ E_1 และ E_2 คือ เหตุการณ์ซึ่งต้องประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเหตุการณ์ E_1 และเหตุการณ์ E_2

เขียนแทนอินเตอร์เซกชันของเหตุการณ์ E_1 และ E_2 ด้วยสัญลักษณ์ $E_1 \cap E_2$

ตัวอย่างที่ 34 จากตัวอย่างที่ 33 จงหาเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าสองลูกหงายแต้มเหมือนกันและหงายแต้มรวมกันน้อยกว่า 5

วิธีทำ $E_1 \cap E_2 = \{(1,1),(2,2)\}$

ดังนั้น เหตุการณ์ดังกล่าว คือ $\{(1,1),(2,2)\}$

ooooooooooooooooooooooo

เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ให้ E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ เรียกเหตุการณ์ E_1 และ E_2 ว่าเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน เมื่อ $E_1 \cap E_2 = \phi$

ตัวอย่างที่ 35 ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มที่หารด้วย 2 ลงตัว

E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มที่หารด้วย 5 ลงตัว

จงแสดงว่า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

วิธีทำ $E_1 = \{2, 4, 6\}$ และ $E_2 = \{5\}$

$E_1 \cap E_2 = \phi$

ดังนั้น E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์

ถ้า S เป็นแซมเปิลสเปซ และ E เป็นเหตุการณ์ที่เป็นสับเซตของ S แล้วคอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ E คือ เหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในแซมเปิลสเปซ S แต่ไม่อยู่ในเหตุการณ์ E

เขียนแทนคอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ E ด้วย E'

ตัวอย่างที่ 36 ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 2 ครั้ง สนใจหน้าที่หงายทั้งหมด จงหาคอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ต่อไปนี้

1) ได้หัวมากกว่าก้อย 2) ได้หน้าต่างกัน

วิธีทำ $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัวมากกว่าก้อย

$E_1 = \{(H, H)\}$

จะได้ $E_1' = \{(H, T), (T, H), (T, T)\}$

ให้ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้หน้าต่างกัน

$E_2 = \{(H, T), (T, H)\}$

จะได้ $E_2' = \{(H, H), (T, T)\}$

ดังนั้น คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ได้หัวมากกว่าก้อย คือ $\{(H, T), (T, H), (T, T)\}$

คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ได้หน้าต่างกัน คือ $\{(H, H), (T, T)\}$

ooooooooooooooooooooooo

แบบฝึกหัดที่ 6

1. จงเขียนแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มต่อไปนี้

1) ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ สนใจระดับคะแนนที่นักเรียนจะทำได้

.....

.....

.....

2) ในการหยิบลูกบอล 1 ลูก จากกล่องที่มีลูกบอลสีขาว สีแดง สีเขียว และสีฟ้า สนใจสีที่หยิบได้

.....

.....

.....

3) ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง สนใจแต้มที่ได้เป็นคู่หรือเป็นคี่

.....

.....

.....

4) ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง สนใจผลรวมของแต้มได้

.....

.....

.....

5) เลือกตัวอักษร 2 ตัว จากตัวอักษร A , B , C , D ตามลำดับ

.....

.....

.....

2. โยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง จงหา

1) แซมเปิลสเปซ

.....

.....

.....

2) เหตุการณ์ที่ได้หัว 2 เหรียญ

.....

.....

.....

3) เหตุการณ์ที่ได้หัวมากกว่า 1 เหรียญ

.....

.....

.....

4) เหตุการณ์ที่ได้ก้อยอย่างมาก 1 เหรียญ

.....

.....

.....

3. หยิบลูกบอลลักษณะเดียวกันมา 2 ลูก จากลูกบอล 5 ลูก ที่มีหมายเลข 1 ถึง 5 จงหา

1) แซมเปิลสเปซ

.....

.....

.....

2) เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลซึ่งมีหมายเลขเป็นจำนวนคู่ทั้งสองลูก

.....

.....

3) เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลซึ่งมีผลบวกของหมายเลขเป็นจำนวนคู่

.....

.....

4) เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลซึ่งมีผลบวกของหมายเลขเป็นจำนวนคี่

.....

.....

4. ในการเลือกตัวแทนพรรคการเมืองพรรคหนึ่งมีผู้ที่มีคุณสมบัติครบตามเกณฑ์ 6 คน มีอายุ 35 , 40 , 48 , 52 , 54 และ 56 ปี ตามลำดับ ถ้าพรรคต้องการเลือกตัวแทน 2 คน จงหา

1) เหตุการณ์ที่ตัวแทนพรรคทั้ง 2 คน มีอายุเกิน 50 ปี

.....

.....

2) เหตุการณ์ที่ตัวแทนพรรคมีอายุน้อยกว่า 50 ปี 1 คน อายุมากกว่า 50 ปี 1 คน

.....

.....

5. กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ให้ $E_1 = \{1, 3, 5\}$, $E_2 = \{2, 4, 6\}$, $E_3 = \{3, 4, 5, 6\}$

1) $E_1 \cup E_2$

.....

.....

2) $(E_1 \cup E_2) \cap E_3'$

.....

.....

3) $E_3' \cup E_4'$

.....

.....

4) $E_2' \cap E_3$

.....

.....

5) $(E_1' \cup E_2) \cap E_4'$

.....

.....

6) $(E_4 \cap E_3) \cap E_2'$

.....

.....

6. ในการทดลองโยนเหรียญ 1 เหรียญ และทอดลูกเต๋า 1 ลูกพร้อมกัน กำหนดให้

E_1 เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัว

E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้มที่หารด้วย 3 ลงตัว

จงหา

1) $E_1 \cap E_2$

.....

.....

.....

2) $E_1 \cup E_2$

.....

.....

3) $E_1' \cap E_2$

.....

.....

4) $E_1 \cap E_2'$

.....

.....

7. ถุงใบหนึ่งบรรจุลูกบอลลักษณะเหมือนกันเป็นสีแดง 2 ลูก สีขาว 2 ลูก และสีเขียว 1 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลออกจากถุงครั้งละ 1 ลูก 2 ครั้ง โดยไม่ใส่คืน กำหนดให้

E_1 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้สีแดงอย่างน้อย 1 ลูก

E_2 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้สีขาว 1 ลูก

E_3 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้สีแดง 2 ลูก

จงหา

1) E_1'

.....

.....

2) $E_2' \cup E_3$

.....

.....

3) $E_2 \cap E_3'$

.....

.....

ooooooooooooooooooooooo

6.4 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ถ้า E เป็นเหตุการณ์ที่สนใจในการทดลองสุ่ม โอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ E มีมากน้อยเพียงใดเป็นสิ่งสำคัญ เพราะจะช่วยให้เรานำมาใช้ในการตัดสินใจต่อเหตุการณ์นั้น แต่เราจะทราบว่าโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์เป็นเท่าใดได้อย่างไร วิธีการที่ทำให้ทราบได้อย่างหนึ่งคือ ทำการทดลองซ้ำ ๆ หลาย ๆ ครั้ง เช่น ในการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ โอกาสที่จะเกิดหัวเป็นเท่าใด เราก็ทำการทดลองโยนเหรียญนั้นไปหลาย ๆ ครั้ง และจดผลการทดลอง นำผลที่เกิดหัวทั้งหมดจากการทดลองมาเปรียบเทียบกับจำนวนครั้งที่ทำการทดลองก็จะได้โอกาสที่จะเกิดหัวของการทดลอง โยนเหรียญที่เที่ยงตรง 1 เหรียญ แต่เราไม่สามารถกำหนดจำนวนครั้งที่แน่นอนของการทดลองได้ว่าควรเป็นกี่ครั้ง

พิจารณาการทดลองทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง ถ้าสนใจผลรวมของแต้มที่ได้จะมีแซมเปิลสเปซ (S) คือ

$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

และถ้าสนใจหน้าของลูกเต๋าที่หงายทั้งหมดจะมีแซมเปิลสเปซ (S) คือ

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

ถ้าต้องการหาโอกาสที่ผลรวมของแต้มเป็น 3 กับผลรวมของแต้ม 4 จากแซมเปิลสเปซ (S) คือ $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ จะมีเหตุการณ์ คือ $E_1 = \{3\}$ และ $E_2 = \{4\}$ ซึ่งจำนวนสมาชิกเท่ากัน ดังนั้น โอกาสที่เกิดขึ้นของผลรวมแต้มเป็น 3 กับผลรวมแต้มเป็น 4 ก็น่าจะเท่ากัน แต่ถ้าพิจารณาจากแซมเปิลสเปซ (S) คือ $(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (6,6)$ จะได้เหตุการณ์ $E_1 = \{(1,2), (2,1)\}$ และ $E_2 = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$ ซึ่งจำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ E_1 และเหตุการณ์ E_2 ไม่เท่ากัน โอกาสจึงไม่น่าจะเท่ากันในการคำนวณหาโอกาสของเหตุการณ์ดังกล่าว จากการทดลองควรใช้แซมเปิลสเปซที่ผลของการทดลองทุกกรณีมีโอกาสเกิดเท่ากัน ในกรณีนี้จึงควรใช้แซมเปิลสเปซ (S) คือ $(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (6,6)$

จากที่กล่าวมาทั้งหมด จะกำหนดข้อตกลงของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ ดังนี้

ในการทดลองเชิงสุ่มใด ๆ ถ้าเราทำการทดลอง N ครั้ง ปรากฏว่าเกิดเหตุการณ์ที่สนใจ n ครั้ง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ดังกล่าวเท่ากับ $\frac{n}{N}$ (เรียกว่า Statistical Probability)

หรือในการทดลองเชิงสุ่มใด ๆ ที่เราสามารถพิจารณาผลที่อาจจะเกิดขึ้นได้จากการทดลองและผลแต่ละอย่างนั้นมีโอกาสที่เกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน แล้วความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เท่ากับ $\frac{n(E)}{n(S)}$ (เรียกว่า Classical Probability) เมื่อ S เป็นแซมเปิลสเปซ และ E เป็นเหตุการณ์ที่สนใจในแซมเปิลสเปซ (S)

ในที่นี้จะกำหนดบทนิยามของความน่าจะเป็น ดังนี้

บทนิยาม ถ้า n(S) เป็นจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ S ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน และ n(E) เป็นจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ E ซึ่งเป็นสับเซตของ S แล้ว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เท่ากับ $\frac{n(E)}{n(S)}$ เขียนแทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ด้วย P(E)

จากบทนิยาม จะได้ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ เมื่อ $E \subset S$

บทนิยามนี้ใช้กับแซมเปิลสเปซ S ที่เป็นเซตจำกัดและสมาชิกแต่ละตัวมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน

เนื่องจาก $E \subset S$ จะได้ $0 \leq n(E) \leq n(S)$

และ $$\frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(E)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)}$$

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

สรุปได้ว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ใน S มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1

ถ้าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เป็น 0 หมายความว่า เหตุการณ์นั้นไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย เช่น จากการทดลองโยนเหรียญ 2 เหรียญ 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่เหรียญหงายหัว 3 ครั้ง มีค่าเป็น 0

และถ้าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เป็น 1 หมายความว่าเหตุการณ์นั้นเกิดขึ้นอย่างแน่นอน เช่น จากการโยนเหรียญ 2 เหรียญ 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะหงายหัวอย่างมาก 2 ครั้ง มีค่าเป็น 1

จากที่กล่าวมาแล้ว สรุปคุณสมบัติของความน่าจะเป็นได้ ดังนี้

1. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ใด ๆ มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 เสมอ

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็นเซตว่างมีค่าเท่ากับ 0

$$P(\phi) = 0$$

3. ความน่าจะเป็นของแซมเปิลสเปซ S มีค่าเท่ากับ 1 เสมอ

$$P(S) = 1$$

ตัวอย่างที่ 37 ถุงใบหนึ่งใส่แผ่นป้ายเล็ก ๆ ที่มีลักษณะเหมือนกันทุกประการ 6 แผ่น แต่ละแผ่นเขียนตัวอักษรภาษาอังกฤษกำกับไว้แผ่นละ 1 ตัว คือ a, b, c, d, e และ f ถ้าสุ่มหยิบแผ่นป้ายมา 1 แผ่น จากถุงดังกล่าว จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้

1) ได้ตัวอักษรที่เป็นสระในภาษาอังกฤษ

2) ได้ตัวอักษรที่ไม่เป็นสระในภาษาอังกฤษ

วิธีทำ แซมเปิลสเปซ $S = \{a, b, c, d, e, f\} : n(S) = 6$

1) ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ตัวอักษรที่เป็นสระในภาษาอังกฤษ

เหตุการณ์ $E_1 = \{a, e\} : n(E_1) = 2$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $E_1 = \dfrac{n(E_1)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ตัวอักษรที่เป็นสระในภาษาอังกฤษเท่ากับ $\dfrac{1}{3}$

2) ให้ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไม่ได้ตัวอักษรที่เป็นสระในภาษาอังกฤษ

เหตุการณ์ $E_2 = \{b, c, d, f\} : n(E_2) = 4$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $E_2 = \dfrac{n(E_2)}{n(S)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบไม่ได้ตัวอักษรที่เป็นสระในภาษาอังกฤษเท่ากับ $\dfrac{2}{3}$

ooooooooooooooooooooooo

ตัวอย่างที่ 38 โยนเหรียญเที่ยงตรง 3 เหรียญ พร้อมกัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้

1) เหรียญหงายหน้าต่างกันทุกเหรียญ
2) ได้หัวหรือก้อยอย่างน้อย 1 เหรียญ
3) ได้หัว 2 เหรียญ ก้อย 1 เหรียญ
4) ไม่ได้หัวเลย

วิธีทำ แซมเปิลสเปซ $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$n(S) = 8$

1) ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายหน้าต่างกันทุกเหรียญ

จะได้ $E_1 = \phi$ และ $n(E_1) = 0$

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{0}{8} = 0$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เหรียญหงายหน้าต่างกันทุกเหรียญเท่ากับ 0

2) ให้ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายหน้าหัวหรือก้อยอย่างน้อย 1 เหรียญ

จะได้ $E_2 = S$ และ $n(E_2) = 8$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{8}{8} = 1$$

26. โยนเหรียญห้าบาท 4 เหรียญ พร้อม ๆ กันหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะหงายหน้าหัว 2 เหรียญ และหงายหน้าก้อย 2 เหรียญ

.....

.....

.....

.....

27. สุดามีเสื้อ 10 ตัว เป็นสีแดง 2 ตัว สีน้ำเงิน 3 ตัว สีเขียว 1 ตัว และสีขาว 4 ตัว มีกระโปรง 6 ตัวเป็นสีแดง 2 ตัว สีน้ำเงิน 3 ตัว และสีเขียว 1 ตัว ถ้าสุดาสุ่มหยิบเสื้อและกางเกงมาอย่างละ 1 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่เธอจะหยิบได้เสื้อและกระโปรงสีต่างกัน

.....

.....

.....

.....

28. ในกล่องทึบใบหนึ่งมีบัตรอยู่ 15 ใบ ขนาดเท่า ๆ กัน เขียนหมายเลข 1 ถึง 15 กำกับไว้ สุ่มหยิบบัตรมา 1 ใบ ความน่าจะเป็นที่หยิบได้บัตรที่มีหมายเลขที่หารด้วย 3 หรือหารด้วย 5 ลงตัวเป็นเท่าใด

.....

.....

.....

.....

29. กล่องทึบใบหนึ่งมีบัตร 4 ใบ มีหมายเลข 1 , 2 , 3 และ 4 เขียนกำกับไว้ สุ่มหยิบมา 2 ใบ โดยหยิบทีละ 1 ใบ โดยไม่ต้องใส่คืน ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้บัตรทั้งสองใบมีผลรวมของเลขเป็น 5 มีค่าเท่าใด

.....

.....

.....

.....

30. ถุงทึบใบหนึ่งมีลูกบอลสีดำ 4 ลูก และสีขาว 3 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลมา 3 ลูก จากถุงใบนี้ ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลทั้ง 3 ลูก เป็นสีขาวมีค่าเท่าใด

.....

.....

.....

31. ตะกร้าผลไม้ใบหนึ่งมีมังคุดนนทบุรี 10 ผล และมังคุดจันทบุรี 10 ผล ถ้าสุ่มหยิบมังคุดในตะกร้าใบนี้มา 7 ผล ความน่าจะเป็นที่จะได้มังคุดนนทบุรี 7 ผลเป็นเท่าใด

.....

.....

.....

.....

32. ถ้าเหตุการณ์ E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วมกันในแซมเปิลสเปซ S

1) ให้ $P(E_1 \cup E_2) = 0.45$ และ $P(E_2) = 0.20$ จงหา $P(E_1')$

2) ให้ $P(E_1) = 0.4$ และ $P(E_2) = 0.5$ จงหา $P(E_1 \cap E_2')$

.....

.....

.....

.....

33. ถ้าเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วมกันในแซมเปิลสเปซ S

1) ให้ $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$ และ $P(A \cap B) = 0.4$ จงหา $P\left[(A \cup B)'\right]$

2) ให้ $P(B) = 0.5$, $P(B - A) = 0.3$ และ $P(A' \cup B) = 0.8$ จงหา $P(A)$

.....

.....

.....

.....

34. จากตารางแสดงความสัมพันธ์ของสุขภาพผู้สูบบุหรี่ทั้งหมด 300 คน ดังนี้

สุขภาพผู้สูบบุหรี่	จำนวนบุหรี่ที่สูบใน 1 วัน (มวน)			
	0 – 4	5 – 20	มากกว่า 20	รวม
เป็นมะเร็ง	8	7	25	40
ไม่เป็นมะเร็ง	150	70	40	260

ถ้าสุ่มคน 1 คน จากกลุ่มนี้ ผู้สูบบุหรี่มากกว่า 20 มวน ใน 1 วัน ความน่าจะเป็นที่จะไม่เป็นมะเร็งเป็นเท่าใด

.....

.....

.....

.....

35. โรงเรียนอนุบาลแห่งหนึ่งมีนักเรียนในชั้นอนุบาลหนึ่งจำนวน 10 คน ในจำนวนนี้ถนัดมือซ้าย 3 คน และสายตาสั้น 2 คน แต่ไม่มีนักเรียนที่ถนัดมือซ้ายและสายตาสั้น ถ้าสุ่มนักเรียนมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนที่

1) ถนัดมือซ้ายหรือสายตาสั้น

2) ไม่ถนัดมือซ้ายและไม่สายตาสั้น

.....

.....

.....

.....

.....

.....

36. จากการสอบถามความสนใจวิชาที่เรียนของนักเรียนจำนวน 100 คน พบว่าสนใจวิชาภาษาอังกฤษ 50 คน สนใจวิชาคณิตศาสตร์ 60 คน มีนักเรียนที่สนใจวิชาภาษาอังกฤษอย่างเดียว 30 คน ถ้าสุ่มเลือกนักเรียนกลุ่มนี้มา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนที่

1) สนใจวิชาภาษาอังกฤษหรือวิชาคณิตศาสตร์

2) สนใจวิชาคณิตศาสตร์เพียงวิชาเดียว

.....

.....

.....

.....

.....

.....

37. ผู้จัดการฝ่ายบุคคลของบริษัทแห่งหนึ่งคิดว่าการจำแนกใบสมัครตามวุฒิการศึกษาหรือตามประสบการณ์ในการทำงานเป็นประโยชน์ต่อการพิจารณาคัดเลือกบุคคลเข้าทำงานเป็นอย่างมาก จากใบสมัครตำแหน่งวิศวกรทั้งหมด เขาพบว่ามี

10% ที่เป็นผู้มีประสบการณ์แต่ไม่มีปริญญา

20% ที่เป็นผู้จบปริญญาแต่ไม่มีประสบการณ์

80% ที่เป็นผู้มีประสบการณ์หรือมีปริญญา

ถ้าสุ่มตัวอย่างใบสมัครมา 1 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ใบสมัครที่

1) ผู้สมัครไม่มีปริญญา

2) ผู้สมัครมีประสบการณ์

3) ได้ผู้สมัครที่ไม่มีทั้งปริญญาและประสบการณ์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

38. จากการสำรวจประชากรของหมู่บ้านแห่งหนึ่ง ปรากฏว่าความน่าจะเป็นของครอบครัวที่ทำสวนลำไยเท่ากับ 0.6 ความน่าจะเป็นที่ทำสวนลิ้นจี่เท่ากับ 0.7 และความน่าจะเป็นของครอบครัวที่ทำสวนลำไย และสวนลิ้นจี่เท่ากับ 0.3 ถ้าหมู่บ้านแห่งนี้มีประชากรอยู่ 200 ครอบครัว จงหาจำนวนครอบครัวที่ทำสวนลำไยหรือทำสวนลิ้นจี่มีกี่ครอบครัว

.....

.....

.....

.....

39. โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 100 คน จากการสำรวจพบว่ามีนักเรียนที่เลือกเรียนวิชาฟิสิกส์ วิชาเคมีและวิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 50 คน 40 คน และ 33 คน ตามลำดับ ในกลุ่มนี้มีเลือกเรียนทั้งสามวิชา 5 คน เลือกเรียนวิชาคณิตศาสตร์อย่างเดียว 10 คน เลือกเรียนวิชาเคมีอย่างเดียว 12 คน และเลือกเรียนทั้งวิชาเคมีและวิชาคณิตศาสตร์ 13 คน ถ้าสุ่มนักเรียนมา 1 คน จากลุ่มนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนที่

1) ไม่ได้เรียนทั้งสามวิชานี้
2) เรียนวิชาฟิสิกส์อย่างเดียว

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

oooooooooooooooooooooooooooooo